ГЛАВА ПЕРВАЯ

СИЛЬНОЕ СЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Система S^1

Логические операторы:

1) $\cdot$ — конъюнкция («и», «каждое из»);

2) $:$ — сильная дизъюнкция («либо», «одно и только одно из»);

3) $\sim$ — отрицание («не», «не так»).

*D*1. Высказывания, которые нельзя расчленить на другие высказывания и логические операторы $\cdot$, $:$ и $\sim$, суть элементарные относительно S^1 высказывания.

*D*2. Высказывание:

1) элементарные относительно S^1 высказывания суть высказывания;

2) если x есть высказывание, то $\sim x$ есть высказывание;

3) если $x^1, \ldots, x^n$ $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n)$ и $(x^1 : \ldots : x^n)$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1—3.

Для упрощения записи будем скобки в ряде случаев опускать, полагая, что конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции, а обе они — сильнее знака следования. Знаки конъюнкции будем опускать записывая соединяемые ими формулы рядом, без интервала.

Аксиомные схемы S^1:

*A*1. $x \vdash \sim\sim x$

*A*2. $\sim\sim x \vdash x$

*A*3. $xy \vdash x$

$A4.\ xy \vdash yx$

$A5.\ x^1x^2 \ldots x^n \vdash y,$

где y отличается от $(x^1x^2 \ldots x^n)$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей $D2$.

$A6.\ y \vdash x^1x^2 \ldots x^n,$

где y то же, что в $A5$.

$A7.\ \sim(xy) \vdash \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$

$A8.\ \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y \vdash \sim(xy)$

$A9.\ \sim(x : y) \vdash xy : \sim x \sim y$

$\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \vdash y^1 : y^2 : \ldots : y^m,$

где y^1, y^2, ..., y^m есть множество попарно различных высказываний, в которые включаются $(x^1x^2 \ldots x^n)$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него наличием одного и только одного оператора отрицания перед всеми x^1, x^2, ... x^n или перед i из них, где $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

$A10.\ xy : \sim x \sim y \vdash \sim(x : y)$

$y^1 : y^2 : \ldots : y^m \vdash \sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n),$

где y^1, y^2, ..., y^m те же, что и в $A9$.

$A11.\ x^1 : x^2 : \ldots : x^n \vdash y,$

где y отличается от $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей определению $D2$.

$A12.\ y \vdash x^1 : x^2 : \ldots : x^n,$

где каждое из x^1, x^2, ..., x^n есть либо $(\alpha^{i1} z^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} z^m)$ (где α^{i1}, ..., α^{im} означают наличие или отсутствие отрицания, а все $(\alpha^{i1} z^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} z^m)$ попарно различны), либо $\sim z_1^i z_1^i z^i$, а y отличается от $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$ лишь расстановкой скобок.

$A13.\quad xy : yz \vdash (x : y)\, z$

$$x^1y : x^2y : \ldots : x^ny \vdash (x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\, y$$

$A14.\quad (x : y)\, z \vdash xz : y$

$$(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\, y \vdash x^1y : x^2 : \ldots : x^n$$

$$(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\,(y^1 : \ldots : y^m) \vdash$$

$$\vdash x^1y^1 : \ldots : x^1y^m : x^2 : \ldots : x^n$$

Аксиомные схемы $A6$, $A9$, $A10$, $A13$ и $A14$ можно рассматривать как множества аксиомных схем. Но можно также последние строки в них рассматривать как запись общих случаев, а предшествующие им строки — как частные случаи, поясняющие общие случаи.

Правила вывода S^1:

$R1$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$

$R2$. Если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash yz$

$R3$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$, то $z \vdash v$,

где v получается из z путем замены вхождения высказывания x (не обязательно всех) в z высказыванием y.

$D6$. Формула следования $x \vdash y$ доказуема в S^1 (есть теорема S^1), если и только если она есть аксиома S^1 или получается из доказуемых в S^1 формул следования по правилам вывода S^1.

Система S^1 была сформулирована (в несколько ином виде) автором в работах [3, 5, 8]. Излагаемые ниже доказательства непарадоксальности, непротиворечивости, независимости и полноты S^1 даны Г. А. Смирновым в работе [12].